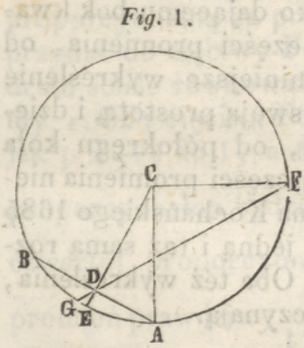
O WYKREŚLENIU KWADRATU, DANEMU KOŁU BLIZKO RÓWNOWAŻNEGO, PODANÉM PRZEZ P. WILLICH, I O DWÓCH SPOSOBACH, JAK SIĘ ZDAJE NIEZNANYCH, KTÓREMIBY NAODWROT, MOŻNA NAKRÉŚLIĆ KOŁO, DANEMU KWADRATOWI BLIZKO RÓWNOWAŻNE.

---

1. *Mając dane koło, znaleźć linią mało tylko różniącą się od boku kwadratu, temu kołu równoważnego.*

Fig. 1.



Niech C (*fig.* 1) będzie środek, CA promień koła danego. Prowadzę cięciwę AB równą promieniowi CA, i wyznaczam jéj środek D, tudzież środek E łuku AB; zaczynając od punktu E, odcinam na okręgu, w stronę EA, tenże promień CA, jako cięciwę, po sobie dwa razy, aby przez to mieć na okręgu punkt F, o 120^0 od punktu E, a o 90^0 od punktu A odległy; punkta F i D łączę linią prostą, i przedłużam ją do spotkania się z łukiem AB w punkcie G; cięciwa FG, gdy poprzestaniemy na pięciu decymalnych, będzie tylko o 0,00047 części promienia CA, krótsza od boku kwadratu, danemu kołu równoważnego.

W trójkącie albowiem CDF, którego kąt DCF ma, z wykréślenia, 120^0, summa kątów D i F wynosi 60^0; a gdy promień weźmiemy za jedność, jest CF=1, CD=

dos 30°. Ten więc trójkąt CDF, według wiadomego twierdzenia, daje

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}(D-F)=\frac{1-\text{dos}\,30^0}{1+\text{dos}\,30^0}\cdot\text{sty}\,30^0=\text{sty}^2\,15^0\ \text{sty}\,30^0;$$

ztąd zaś, według tablic, wypada

$$\tfrac{1}{2}(D-F)=2^0 22' 25'',\ \text{a tém samém}\ F=27^0 37' 35''.$$

A że kąt ostry, zawarty między cięciwą FG i styczną koła w punkcie F, dopełnia kąta F do 90°, a ma za miarę połowę łuku FAG; jest przeto ½ FAG = 62° 22′ 25″, a ztąd 2 wst ½ FAG czyli cięciwa FG = 1,77198. Lecz wiadomo, że kwadrat równoważny kołu mającemu za promień jedność, ma za bok liczbę $\sqrt{\pi}$, wynoszącą 1,77245, gdy poprzestaniemy na pięciu decymalnych; błąd zatém teraźniejszego wykréślenia jest rzeczywiście taki, jak się twierdziło.

Wyłożone dopiéro wykréślenie należy się p. Willich, i było przezeń 25 lutego 1856 r., Akademii Nauk paryzkiéj podane ([1]). Ustępuje ono, pod względem stopnia przybliżenia, sposobom dawniéj znanym, a w szczególności sposobowi Sonnet'a, jako dającemu bok kwadratu, prawie tylko o 0,0000036 części promienia, od boku prawdziwego krótszy. Ale niniejsze wykréślenie Willichowe zaleca się natomiast swoją prostotą, i dzieli z pamiętném wykréśleniem linii, od półokręgu koła danego tylko o sześć stutysięcznych części promienia niespełna krótszéj, przez księdza Adama Kochańskiego 1685 roku podaném, tę własność: że się jedną i tąż samą rozwartością cyrkla da całe wykonać. Oba też wykréślenia, o których tu mowa, jednako się zaczynają.

([1]) *Comptes rendus*, T. XLII, str. 398, i *Calculs pratiques appliqués aux sciences d'observation; par MM.* Babinet *et* Housel. *Paris*, 1857, str. 118—119. W piérwszém z dwóch miejsc dopiéro przytoczonych, znajdują się tylko te słowa: „Nota o pewnéj konstrukcyi graficznéj, za pomocą któréj się otrzymuje, z różnicą bardzo tylko mały ułomek wynoszącą, długość boku kwadratu, danemu kołu równoważnego; przez p. Willich", i że ta Nota oddaną została do sprawozdania, pp. Babinet i Chasles. W drugiém zaś miejscu znajduje się i wykréślenie o którém tu mówimy, i dowód tegoż wykréślenia.

Stosunek cięciwy FG do promienia, daje się łatwo wyprowadzić i bez pomocy trygonometryi, a jest taki:

$$\frac{FG}{CA}=\frac{4+\sqrt{3}}{\sqrt{7+2\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{85+\sqrt{972}}{37}}$$

Dowód więc powyższy, z nieznaczną tylko odmianą z dzieła pp. Babinet i Housel wyjęty, możnaby zastąpić dowodem innym, przed trygonometryą wyłożyć się dającym.

2. *Mając dany bok* b *kwadratu, znaleźć linią blizko przystępującą do promienia koła, temu kwadratowi równoważnego.*

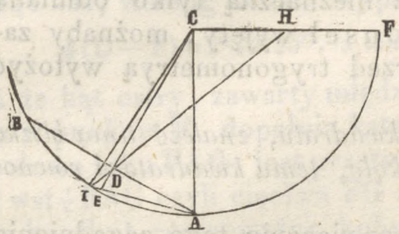
Chcąc poprzestać na rozwiązaniu tego zagadnienia ubocznem, oczywiście dosyć byłoby zagadnienie poprzedzające, względem teraźniejszego odwrotne, rozwiązać na promień CA wzięty od upodobania, a potém do linij FG, CF i b, znaleźć czwartą proporcyonalną (tojest: na kierunek cięciwy FG, od któregokolwiek jéj końca zaczynając, przenieść bok dany b, a przez drugi koniec tak przeniesionego boku b, poprowadzić równoległą do linii GC, aż do przecięcia się z FC), i wziąć tę czwartą proporcyonalną za promień szukany. Gdy to, co trzeba przydać do cięciwy FG, aby summa była bokiem kwadratu ściśle równoważnego kołu z promienia CF, nazwiemy ε. CF; cięciwa FG będzie się miała do promienia CF, jak $\sqrt{\pi}-\varepsilon$ do 1, a tém samém, znaleziona tu czwarta proporcyonalna będzie równa $\frac{b}{\sqrt{\pi}-\varepsilon}$. Coby więc do téj czwartéj proporcyonalnéj należało przydać, aby mieć promień prawdziwy $\frac{b}{\sqrt{\pi}}$, wyniesie $-\frac{\varepsilon b}{\sqrt{\pi}(\sqrt{\pi}-\varepsilon)}$; a zatém, w przybliżeniu, $-$ 0,00015.b, lub $-$ 0,0000012.b, stosownie do tego, jak linią FG znajdziemy sposobem Willich'a, lub sposobem Sonnet'a.

Z pomiędzy zaś sposobów znanych, któremi się teraźniejsze zagadnienie drugie rozwiązuje wprost, jest jeden taki: Wynajduję średnią geometryczną między $\frac{5}{2}b$ i $\frac{5}{3}b$, tudzież średnią geometryczną między $\frac{5}{2}b$ i $\frac{1}{3}b$; połowa różnicy tych dwóch średnich geometrycznych bę-

dzie, w przybliżeniu, tylko o 0,0000043.b mniejsza od promienia koła równoważnego kwadratowi z boku b.

Zastanawiającemu się atoli nad powyższém wykréśleniem Willichowém, przyszło na myśl pytanie: czy wtenczas, gdy będę miał dany kwadrat ACF(*fig.* 2), a z wiérzchołka C jako ze środka, promieniem CA, nakréślę koło, i poprowadziwszy w niém cięciwę AB = CA, wyznaczę jéj środek D, nie dałaby się przez punkt D poprowadzić łatwo linia prosta HDI, przecinająca łuk AB w punkcie I tak, aby cięciwę AI można, z nieznacznym tylko błędem, wziąć za promień koła równoważnego kwadratowi ACF.

Fig. 2.



W tym celu, mając tablice logarytmowe tylko o siedmiu decymalnych pod ręką, wzięło się bok CA za jedność, a podstawiwszy za cięciwę AI, wartość liczby $\sqrt{\frac{1}{\pi}}$ przybliżoną w ośmiu decymalnych, znalazło się połowę kąta ACI; przewyżka zaś téj połowy nad 15^0, dała połowę kąta DCI. Z wiadomych potém w trójkącie CDI, dwóch boków CI, CD i kąta między niemi zawartego, znalazło się kąt CDI; tego zaś kąta CDI, spełnienie do 180^0, a przeciwnie nadmiar nad DCH $= 120^0$, okazały, że w trójkącie CDH, kąt

$$D = 19^0\,59'\,58{,}38'', \text{ a } H = 40^0\,0'\,1{,}62''.$$

Niniejsze dwa kąty i bok CD, drugiemu z nich przeciwległy, dały następnie

$$CH = 0{,}4607882.$$

Możnaby zresztą dowieść bez pomocy trygonometryi, że gdy przez punkt D poprowadzimy od upodobania linią prostą, przecinającą się z łukiem AB w punkcie I, a z bokiem CF w punkcie H, i (biorąc zawsze CA czyli CF za jedność), położymy dla skrócenia, cięciwę AI $= p$, a CH $= q$; będzie

$$q = \frac{3p\sqrt{4-p^2}-(2-p^2)\sqrt{3}}{2(1-2p^2)}.$$

W założeniu więc $p=\sqrt{\frac{1}{\pi}}$, powinno być

$$q=\frac{3\sqrt{\pi-\frac{1}{4}}-(\pi-\frac{1}{2})\sqrt{3}}{\pi-2},$$

czyli, po obliczeniu drugiéj strony wprost,

$$CH=0{,}4607881\,79,$$

nie posuwając przybliżenia daléj. Każda z napisanych tu wartości przybliżonych dla CH, pokazuje, że jeżeli cięciwa $AI=\sqrt{\frac{1}{\pi}}$, natenczas

$$CH=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{1}+\frac{1}{7}+\frac{1}{24}+ \text{ i t. d.};$$

a ten ułomek ciągły, jest od swego czwartego reduktu

$$\frac{47}{102}=\frac{1}{6}+\frac{5}{17}=0{,}4607843\,13\ldots,$$

tylko o cztéry milionowe części jednostki niespełna większy.

Mając zatém dany bok CA kwadratu, i chcąc znaleźć promień koła, temu kwadratowi blizko równoważnego, kréślę ze środka C, promieniem CA, okrąg koła, a poprowadziwszy w tém kole cięciwę AB = CA, dzielę ją na dwie równe części w punkcie D. Potém zaś:

1) Za pomocą przenośnika, prowadzę przez punkt D, linią HD tak, aby kąt CDH miał 20°, i niech ta linia przecina łuk AB w punkcie I; cięciwa AI będzie promieniem szukanym.

2) Albo téż wyznaczam wiérzchołek F kwadratu, przeciwległy wiérzchołkowi A; na boku CF odcinam $\frac{1}{6}+\frac{5}{17}$ tegoż boku, od C do H, a przez punkta H i D prowadzę linią prostą, która niech się z łukiem AB przecina w punkcie I; cięciwa AI będzie także promieniem żądanym.

W wykreśleniu sposobem 1), kąt zawarty między kierunkami CA i HD powinien miéć 50°, a kąt CHD, 40°.

Dla wykazania wprost, że znaleziona którymkolwiek z tych dwóch sposobów, cięciwa AI, jest, jak na rysunek, więcéj niż dostatecznie zbliżona do promienia koła, danemu kwadratowi równoważnego, mamy, co do 1), w trójkącie CDI, bok CI = 1, CD = dos 30°, a kąt ze-

wnętrzny CDH $= 20^0$ z wykréślenia, tak, iż wst CID = wst 20^0. dos 30^0; znajdziemy więc kątCID. Odejmując kąt CID od kąta zawartego między kierunkami CA i HD, a wynoszącego tu 50^0, będziemy mieli kąt ACI, a zatém i połowę onegoż; z czego następnie wypadnie nam 2 wst $\frac{1}{2}$ ACI czyli

$$\begin{array}{ll} \text{cięciwa AI} & = 0,5641907, \\ \text{zamiast} \sqrt{\frac{1}{\pi}} & = 0,5641896; \\ \text{błąd} & -0,0000011. \end{array}$$

Co do 2), w trójkącie CDH, z wiadomych dwóch boków, CD = dos 30^0, CH $= \frac{47}{102}$, i kąta między niemi zawartego DCH $= 120^0$, znajdziemy kąt CDH; następnie, w trójkącie CDI, za pomocą związku wst CID = wst CDH. dos 30^0, znajdziemy kąt CID. Odejmując kąt CID od kąta CDH i zwiększając resztę o 30^0, będziemy mieli kąt ACI, a zatém i połowę onegoż; ztąd zaś wypadnie nam 2 wst $\frac{1}{2}$ ACI czyli

$$\begin{array}{ll} \text{cięciwa AI} & = 0,5641893, \\ \text{zamiast} \sqrt{\frac{1}{\pi}} & = 0,5641896; \\ \text{błąd} & +0,0000003. \end{array}$$

Chcąc zresztą, w dowodzeniu tego drugiego rozwiązania, obejść się bez trygonometryi i tablic, wzięlibyśmy przed się związek

$$p^2 = \frac{12 + 4q^2 + 5q\sqrt{3} - 3\sqrt{12 + 7q^2 + 8q\sqrt{3}}}{2(3 + 4q^2 + 2q\sqrt{3})}$$

a zakładając w nim $q = \frac{47}{102}$ i obliczając wprost, przekonalibyśmy się, że niedomiar teraźniejszéj cięciwy AI do $\sqrt{\frac{1}{\pi}}$, wynosi 0,0000003 022, nieposuwając przybliżenia daléj.

Nadmienimy tu jeszcze np., że gdybyśmy na boku CF, odcięli

$$\text{CH} = \frac{\text{CF} + \text{cięc. AF} + \text{cięc. EF}}{9} = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{9} \,.\, \text{CA},$$

a przez tak wyznaczony punkt H, i przez punkt D, poprowadzili linią prostą HD aż do przecięcia się z łukiem AB w punkcie I; wypadającéj ztąd cięciwie AI niedostawałoby około 0,0000072 . CA, do zrównania się z pro-

mieniem koła, równoważnego kwadratowi mającemu za bok CA.

Gdybyśmy zaś na boku CF danego kwadratu, odcięli

$$\mathrm{CH} = \frac{\text{przekątn. AF} - \mathrm{AD}}{2},$$

a przez tak wyznaczony punkt H, i przez punkt D, poprowadzili znowu linią prostą HD aż do przecięcia się z łukiem AB w punkcie I; wypadająca ztąd cięciwa AI byłaby od promienia koła danemu kwadratowi równoważnego, około 0,000288.CA krótsza: gdy tymczasem w tém z wykréśleń znanych, które każe połowę przekątnéj danego kwadratu podzielić na pięć części równych, i wziąć cztéry z nich za promień koła temuż kwadratowi równoważnego, błąd wynosi blizko — 0,0015.CA.

W kwietniu 1859 r.

A. F.

Fręczkiewicz